Teisteanais
Nàiseanta
2025

X874/77/12

Matamataig
Pàipear 2

DILUAIN, 12 CÈITEAN
10:30 M – 1:00 F

Comharran gu lèir — 80

Feuch na ceistean UILE.

Faodaidh tu àireamhair a chleachdadh.

Gus na comharran gu lèir fhaighinn, feumaidh tu d' obrachadh a-mach a shealltainn anns na freagairtean agad.

Cuir na h-aonadan anns na freagairtean agad far a bheil sin iomchaidh.

Chan fhaigh thu comharran airson fhreagairtean a tha air an togail bho dhealbhan-sgèile.

Sgrìobh do fhreagairtean gu soilleir anns na beàrnan ann an leabhran nam freagairtean. Chan eil farsaingeachd an àite airson freagairt idir ag innse na bu chòir dhut a sgrìobhadh. Cha leig thu a leas an t-àite gu lèir a chleachdadh.

Tha àite a bharrachd airson fhreagairtean aig deireadh an leabhrain seo. Ma chleachdas tu an t-àite sin, feumaidh tu àireamh na ceiste a tha thu a' freagairt a chomharrachadh gu soilleir.

Cleachd inc **gorm** no **dubh**.

Mus fàg thu seòmar na deuchainne, feumaidh tu leabhran nam freagairtean a thoirt don Fhreiceadan; mura dèan thu sin, dh'fhaodadh tu na comharran gu lèir airson a' phàipeir seo a chall.

SQA ©

LIOSTA FHOIRMLEAN

Deribheataibhean àbhaisteach	
$f(x)$	$f'(x)$
$\sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x

Iontagrailean àbhaisteach	
$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sec^2(ax)$	$\dfrac{1}{a}\tan(ax)+c$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)+c$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)+c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
e^{ax}	$\dfrac{1}{a}e^{ax}+c$

Suimeachaidhean

(Sreath aritmeataigeach) $S_n = \dfrac{1}{2}n\left[2a+(n-1)d\right]$

(Sreath geoimeatrach) $S_n = \dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}, r \neq 1$

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Teoram nan dà-theirmeach

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r \text{ far a bheil } \binom{n}{r} = {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Leudachadh Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{iv}(0)x^4}{4!} + \ldots$$

LIOSTA FHOIRMLEAN (a' leantainn)

Teoram De Moivre

$$\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

Toradh-bheactor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\hat{\mathbf{n}}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Eadar-nochdadh mhatraigsean

Cuairteachadh tuathal tro cheàrn, θ, mun tùs, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

[Tionndaidh an duilleag

Comharran gu lèir — 80

Feuch na ceistean UILE

1. Tha fuincsean air a riochdachadh le $f(x) = \cos^{-1} 4x$.

Lorg $f'(x)$. **2**

2. Tha lùb air a riochdachadh leis a' cho-aontar $2y^2 + 4xe^{2y} = 3x$.

Lorg abairt airson $\frac{dy}{dx}$ a rèir x agus y. **3**

3. Sgrìobh $\frac{2x^2 - 18x + 4}{(x-1)(x-3)(x+5)}$ ann am bloighean pàirteach. **3**

4. (a) Cleachd algoritim Euclid gus d a lorg, an roinniche cumanta as motha de 1118 agus 416. **1**

(b) Mar sin, lorg iontaidsearan a agus b mas e 's gu bheil $1118a + 416b = d$. **2**

5. Tha lùb air a riochdachadh le $y = x^{\cot x}$.

Cleachd diofarachadh logaritmeach gus $\frac{dy}{dx}$ a lorg.

Sgrìobh do fhreagairt a rèir x. **5**

6. (a) Lorg agus sìmplich an leudachadh Maclaurin, suas gu agus a' gabhail a-steach an teirm ann an x^4, airson $\cos 3x$. **2**

(b) Mar sin, lorg agus sìmplich leudachadh Maclaurin, suas gu agus a' gabhail a-steach an teirm ann an x^4, airson $\cos^2 3x$. **2**

7. Tha lùb air a riochdachadh air raon freagarrach leis na co-aontaran $x = t^2$ agus $y = \tan t$.

Lorg a rèir t:

(a) $\dfrac{dy}{dx}$ **2**

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. **3**

8. Tha am feart a leanas aig a' mhatraigs A:

$$A^2 = 6A - I, \text{ far a bheil } I \text{ am matraigs ionannachd.}$$

(a) Sgrìobh A^3 anns an riochd $pA + qI$, far a bheil $p, q \in \mathbb{R}$. **2**

Tha matraigs A neo-shingilte.

(b) Lorg abairt cho-choltach airson A^{-1} a rèir A agus I. **2**

9. A rèir tùs stèidhichte, tha an luaths, v meatair san diog, de nì aig àm t diog air a riochdachadh le $v = 2t + e^{5t}$.

(a) Lorg abairt airson eadar-shuidheachadh an nì, s meatair, a rèir t, ma tha $s = 0$ nuair a tha $t = 0$. **2**

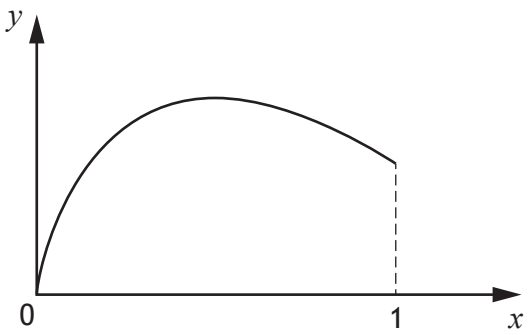
(b) Seall gu bheil reat-luathachaidh an nì daonnan dearbhte. **2**

10. Lorg agus factaraich gu h-iomlan an abairt airson $\sum_{r=1}^{n} \left(r^3 - 3r\right)$. **2**

[Tionndaidh an duilleag

11. (a) A' cleachdachadh an ionadachaidh $u = 2x^2$, no a chaochladh, lorg $\int xe^{-2x^2}\,dx$. **2**

Tha an diagram a' sealltainn pàirt den lùb leis a' cho-aontar $y = \dfrac{4\sqrt{x}}{e^{x^2}}$.



Tha cruth ga dhèanamh le bhith a' cur na lùib mun cuairt tro 2π radianan mun x-axis bho $x = 0$ gu $x = 1$.

(b) Obraich a-mach luach mionaideach an tomhais-lìonaidh a tha air chruthachadh. **3**

12. Fuasgail an co-aontar diofarail

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 15y = 15x^2 - 31x + 40$$

ma tha $y = 4$ agus $\dfrac{dy}{dx} = 13$ nuair a tha $x = 0$. **9**

13. Ann an sreath geoimeatrach neo-chrìochnach de dh'àireamhan dearbhte, 's e an dàrna teirm 100 agus 's e an ceathramh teirm 16.

(a) Obraich a-mach:

(i) an co-mheas cumanta **2**

(ii) a' chiad teirm san t-sreath seo. **1**

(b) Mìnich carson a tha sùim gu neo-chrìochnachd aig an t-sreath gheoimeatrach a tha co-cheangailte ris. **1**

(c) Obraich a-mach an t-sùim seo gu neo-chrìochnachd. **1**

Thathar a' cruthachadh sreath geoimeatrach ùr le bhith ag iomadachadh gach teirm anns an t-sreath gu h-àrd leis an fhìor-àireimh k, far a bheil $k \neq 0$.

(d) Sgrìobh dè a' bhuaidh a bhios aig seo air:

(i) a' cho-mheas chumanta **1**

(ii) an t-sùim gu neo-chrìochnachd aig an t-sreath a tha co-cheangailte ris. **1**

14. Lorg am fuasgladh coitcheann airson a' cho-aontair dhiofarail

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 \sec^2 3x.$$

Thoir do fhreagairt anns an riochd $y = f(x)$. **5**

15. Dearbh le ionducsean gu bheil, airson a h-uile iontaidsear dearbhte n,

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r+1)(2r-1)} = \frac{n}{2n+1}.$$ **5**

[Tionndaidh an duilleag

16. Cleachd ìontagrachadh pàirteach gus na leanas a lorg

$$\int e^{2x} \sin 5x \, dx.$$ **5**

17. Tha an tomhas-lìonaidh, V cm^3, airson uisge ann an tanca air a riochdachadh le

$V = \frac{1}{5}h^3$, far as e h cm doimhneachd an uisge anns an tanca.

Tha uisge ga chur anns an tanca aig reat 6 cm^3/diog.

Tha uisge ag aoidion à bonn an tanca aig reat $\frac{1}{10}\sqrt{h}$ cm^3/diog.

Obraich a-mach reat atharrachaidh doimhneachd an uisge nuair a tha $h = 400$. **4**

18. Leig $z = x + iy$ a bhith na àireamh choimpleacs, far a bheil $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Sgrìobh $\overline{z} + iz$ ann an riochd Cartesianach, far as e $\overline{z}$ an co-nasgadh coimpleacs airson z. **2**

(ii) Ma tha $x > y$, lorg an argamaid aig $\overline{z} + iz$. **1**

Nuair a tha $x < y$, $\overline{z} + iz = r\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ far as e r am modulus aig $\overline{z} + iz$.

(b) Cleachd teoram De Moivre gus an dà fhreumh cheàrnagach aig $\overline{z} + iz$ a lorg, ann an riochd pòlar. **2**

[CRÌOCH A' PHÀIPEIR]